Γεωμετρία Β’ Λυκείου

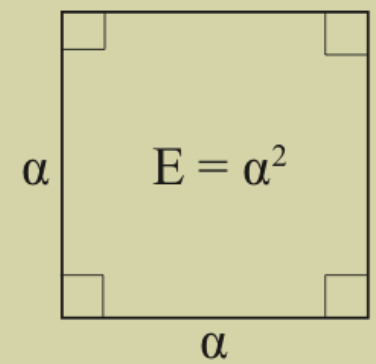
10.1, 10.2, 10.3 - Εμβαδά

Εμβαδό τετραγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το εμβαδόν Ε ενός τετραγώνου πλευράς α είναι α^2, δηλαδή:

$$\mathbf{E = \alpha^2}.$$



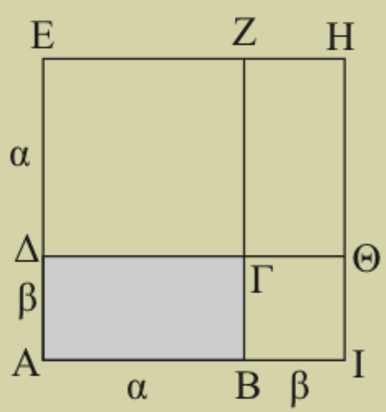
Εμβαδό ορθογωνίου

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Δηλαδή αν α, β, οι πλευρές και Ε το εμβαδόν είναι:

$$\mathbf{E = \alpha \cdot \beta}$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ = α και ΑΔ = β (σχ.7). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = α, την ΑΒ κατά ΒΙ = β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά α + β και επομένως είναι:

$$(\mathrm{AIHE}) = (\alpha + \beta)^2 \quad (1).$$

Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Έτσι έχουμε

$$(\Delta\Gamma\mathrm{ZE}) = \alpha^2,\ (\mathrm{BI}\Theta\Gamma) = \beta^2 \text{ και } (\Gamma\Theta\mathrm{HZ}) = (\mathrm{AB}\Gamma\Delta) \quad (2)$$

Είναι φανερό όμως ότι

$$(\mathrm{AIHE}) = (\mathrm{AB}\Gamma\Delta) + (\Gamma\Theta\mathrm{HZ}) + (\mathrm{BI}\Theta\Gamma) + (\Delta\Gamma\mathrm{ZE}),$$

από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 = 2(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) + \alpha^2 + \beta^2.$$

Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \beta.$$

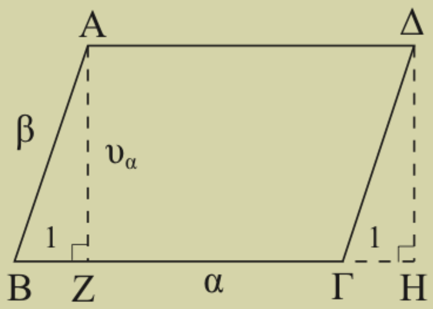
Εμβαδό παραλληλογράμμου

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Το εμβαδόν Ε ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.

Δηλαδή $\quad \mathbf{E = \alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta}$,

όπου α, β οι πλευρές και υ_α, υ_β τα αντίστοιχα ύψη.



Σχήμα 8

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ.8) και ας φέρουμε το ύψος ΑΖ που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι (ΑΒΓΔ) = ΒΓ · ΑΖ.

Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Τότε τα τρίγωνα ΖΒΑ και ΗΓΔ είναι ίσα ($\hat{Z} = \hat{H} = 90°$, ΑΒ = ΔΓ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$), οπότε: (ΖΒΑ) = (ΗΓΔ) $\quad$ (1).

Από το σχήμα όμως έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΖ) + (ΑΖΓΔ), οπότε σύμφωνα με την (1) προκύπτει ότι

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΓΔ) + (ΔΓΗ) = (ΑΖΗΔ).$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Ι έχουμε

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΗΔ) = ΑΔ \cdot ΑΖ = ΒΓ \cdot ΑΖ,$$

που είναι το ζητούμενο.

Με τη βοήθεια του εμβαδού του παραλληλογράμμου θα υπολογίσουμε τον τύπο του εμβαδού τριγώνου.

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΓΔ) + (ΔΓΗ) = (ΑΖΗΔ).$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Ι έχουμε

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΗΔ) = ΑΔ \cdot ΑΖ = ΒΓ \cdot ΑΖ,$$

που είναι το ζητούμενο.

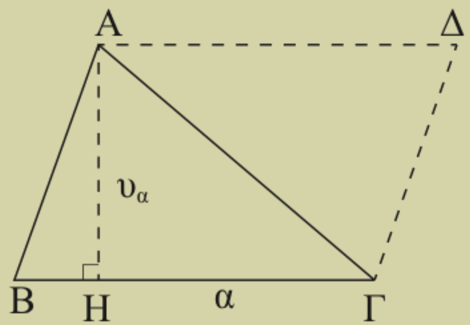
Με τη βοήθεια του εμβαδού του παραλληλογράμμου θα υπολογίσουμε τον τύπο του εμβαδού τριγώνου.

Εμβαδό τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

Δηλαδή $$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\upsilon}_{\alpha} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\upsilon}_{\beta} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\upsilon}_{\gamma}.$$



Σχήμα 9

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με πλευρές ΑΒ και ΒΓ (σχ.9) σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \alpha \cdot \upsilon_{\alpha} \quad (1).$$

Όμως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ίσα, οπότε:

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{A\Delta\Gamma}) \quad (2).$$

Από το σχήμα έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) η οποία, σύμφωνα με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην

$$\alpha \cdot \upsilon_{\alpha} = 2(\mathrm{AB\Gamma}) \quad ή \quad (\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_{\alpha}.$$

Τέλος, τον τύπο του εμβαδού τριγώνου θα τον αξιοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου.

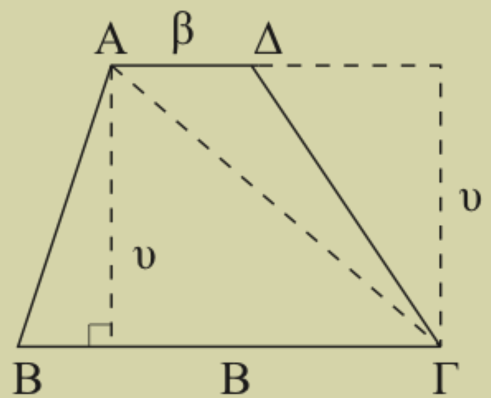
Εμβαδό τραπεζίου

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Δηλαδή $$\mathbf{E = \frac{(B+\beta)}{2} \cdot \upsilon},$$

όπου Β, β οι βάσεις του τραπεζίου και υ το ύψος του.



Σχήμα 10

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) (σχ.10), με βάσεις ΒΓ = Β, ΑΔ = β και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε

$$E = (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) \quad (1).$$

Αλλά τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}B \cdot \upsilon \quad \text{και} \quad (ΑΒΔ) = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon \quad (2).$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι $E = \dfrac{B+\beta}{2} \cdot \upsilon$, δηλαδή το ζητούμενο.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

Ερωτήσεις Κατανόησης

2. *Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 16. Πόσο είναι το εμβαδόν του;*

3. *Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις $\alpha = 9$, $\beta = 4$ και είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς x. Να βρεθεί το x.*

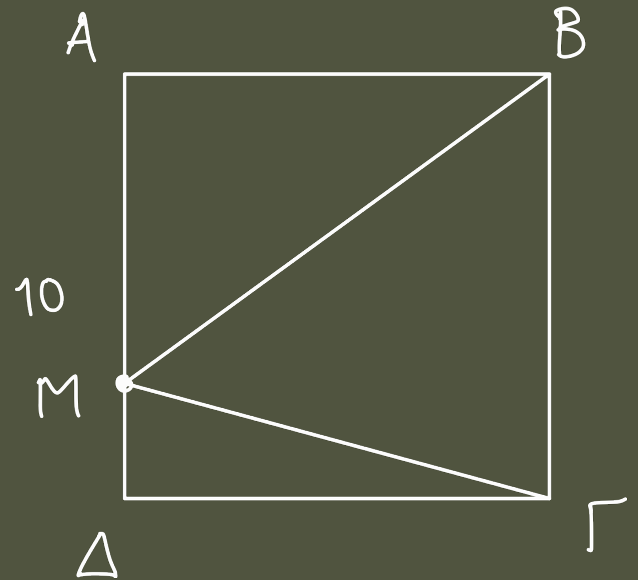
6. *Ένας χωρικός αντάλλαξε έναν αγρό, που είχε σχήμα τετραγώνου πλευράς 60 m, με έναν άλλο αγρό (με την ίδια ποιότητα χώματος) που είχε σχήμα ορθογωνίου με πλάτος 40 m και περίμετρο ίση με την περίμετρο του πρώτου. Έχασε ή κέρδισε ο χωρικός από την ανταλλαγή αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

2. *Αν Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΔ = 10 τετραγώνου ΑΒΓΔ, τότε το άθροισμα (ΑΜΒ) + (ΔΜΓ) είναι:*

α. 25 β. 40 γ. 50 δ. 75 ε. 100

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



$$(AMB)+(\Delta M\Gamma) = \frac{1}{2}AB\cdot AM + \frac{1}{2}M\Delta\cdot\Delta\Gamma$$

$$= \frac{1}{2}10\cdot AM + \frac{1}{2}M\Delta\cdot 10$$

$$= 5AM + 5M\Delta$$

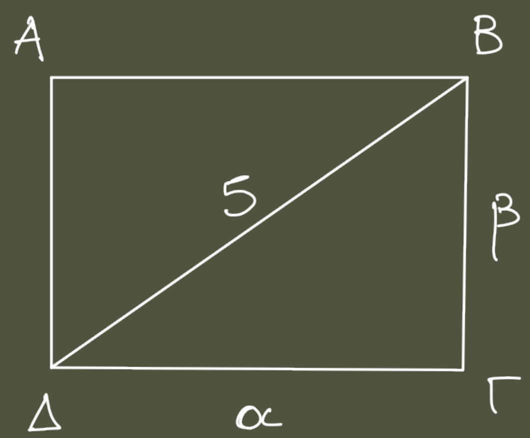
$$= 5(AM + M\Delta)$$

$$= 5\cdot A\Delta$$

$$= 5\cdot 10$$

$$= 50$$

4. *Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 14 και διαγώνιο 5. Να βρείτε το εμβαδόν του.*



$\left.\begin{array}{l} \Pi = 14 \\ \Delta B = 5 \\ E = ? \end{array}\right\}$

Έστω α και β οι πλευρές του. Τότε

$2\alpha + 2\beta = 14 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 7$

Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta B \Gamma}$ ορθ. άρα

$\alpha^2 + \beta^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + (7-\alpha)^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + 49 - 14\alpha + \alpha^2 = 25 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 14\alpha + 24 = 0 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} \alpha^2 - 7\alpha + 12 = 0$

$\alpha = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \dfrac{7 \pm 1}{2} \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$

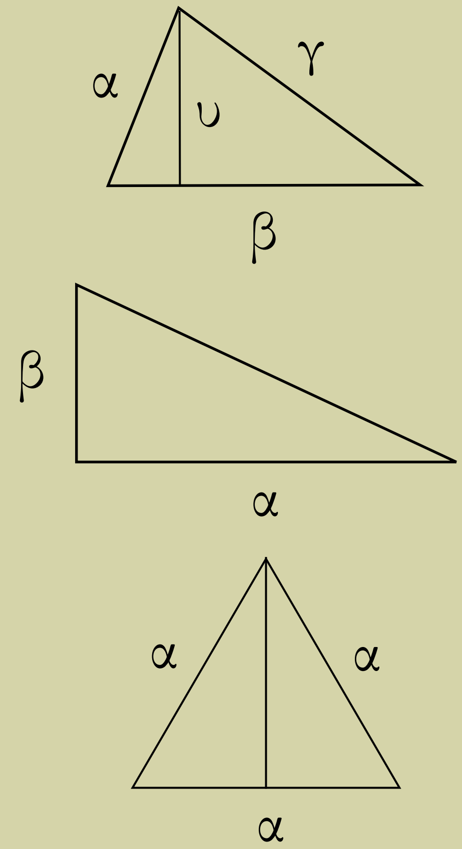
. Αν $\alpha = 4$, $\beta = 3$

$\alpha = 3$, $\beta = 4$

Σε κάθε περίπτωση $E = \alpha \cdot \beta = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$

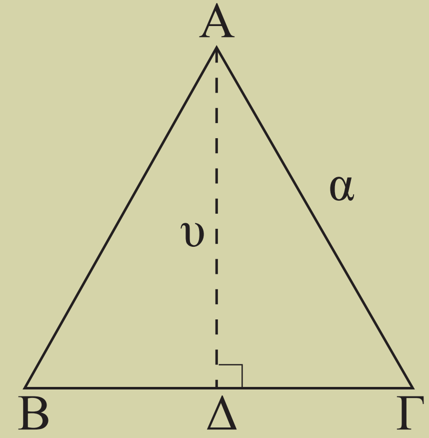
10.3 - Εμβαδόν τριγώνου

Τρίγωνο	$E=\frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$, $2\tau=\alpha+\beta+\gamma$
Ορθογώνιο τρίγωνο	$E=\frac{\alpha \cdot \beta}{2}$
Ισόπλευρο τρίγωνο	$E=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ $\upsilon=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ $\Pi=3\alpha$



Το εμβαδόν Ε ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με

$$\mathbf{E} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}.$$



Σχήμα 11

Απόδειξη

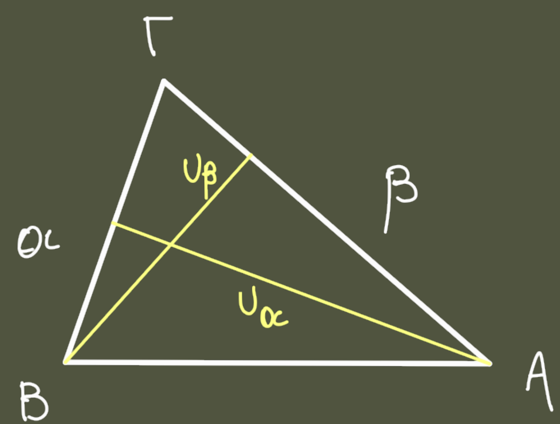
Φέρουμε το ύψος ΑΔ (σχ.11) το οποίο είναι και διάμεσος. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε

$$\upsilon^2 = \mathrm{A}\Delta^2 = \alpha^2 - \Delta\Gamma^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{3\alpha^2}{4},$$

δηλαδή $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, οπότε $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\alpha\upsilon = \frac{1}{2}\alpha\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

Ερωτήσεις Κατανόησης

4. *Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha < \beta$. Με ποια ανισοτική σχέση συνδέονται τα υ_α και υ_β ;*



Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τον τύπο $\frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ ή $\frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta$.

Άρα :

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\alpha\upsilon_\alpha = \cancel{\tfrac{1}{2}}\beta\cdot\upsilon_\beta$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\alpha}$$

όμως $\alpha < \beta$ άρα $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ οπότε $\frac{\upsilon_\beta}{\upsilon_\alpha} < 1 \Rightarrow \upsilon_\beta < \upsilon_\alpha$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και $\hat{A} = 60°$. Να βρεθούν: i) το ύψος $υ_β$, ii) το εμβαδόν (ΑΒΓ), iii) το ύψος $υ_α$.*

i) Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ είναι ορθογώνιο και $A\hat{B}\Delta = 30°$ άρα $A\Delta = 3$ (το μισό της υποτείνουσας). Άρα κάνοντας πυθαγόρειο στο $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ βρίσκω το ύψος $υ_β$:

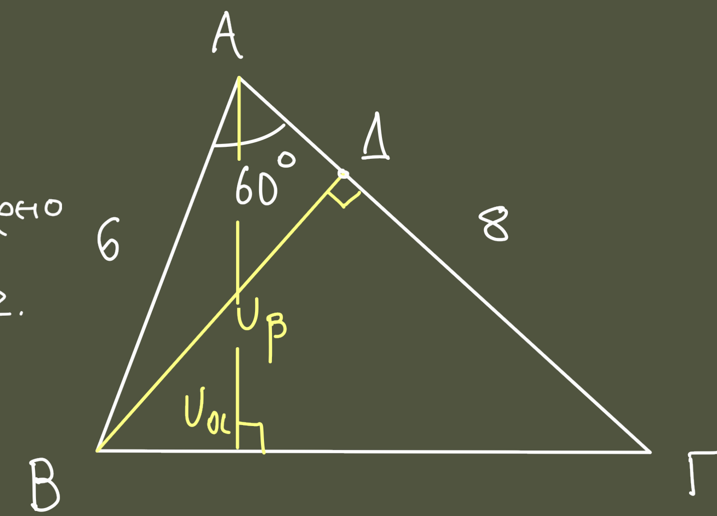
$$B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 = 36 - 9 = 27 \Leftrightarrow B\Delta = \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}.$$

ii) $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot υ_β = \frac{1}{2} 8 \cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$

iii) Ξέρουμε ότι $A\Delta = 3$ άρα $\Delta\Gamma = 5$. ενώ $υ_β = 3\sqrt{3}$. Με Πυθαγόρειο στο $\overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$ έχουμε $B\Gamma^2 = υ_β^2 + \Delta\Gamma^2 = (3\sqrt{3})^2 + 25 = 9 \cdot 3 + 25 = 52.$

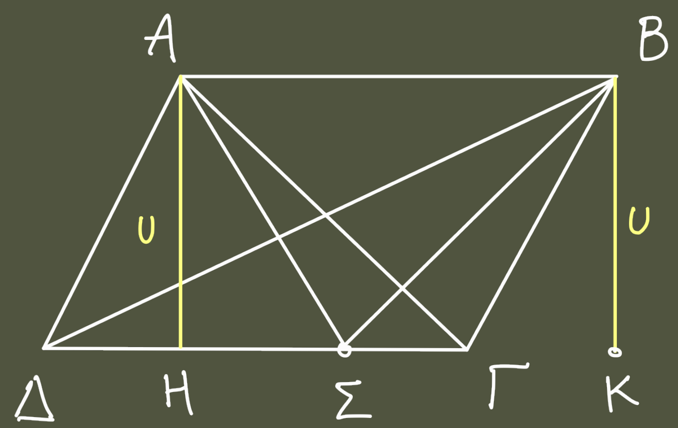
άρα $B\Gamma = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. $E_{AB\Gamma} = 12\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} B\Gamma \cdot υ_α = 12\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\sqrt{13} \cdot υ_α = 12\sqrt{3} \Leftrightarrow υ_α = 12\sqrt{\frac{3}{13}}$



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν Σ είναι σημείο μιας πλευράς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι (ΣΑΓ) + (ΣΒΔ) = (ΑΒΓ).*



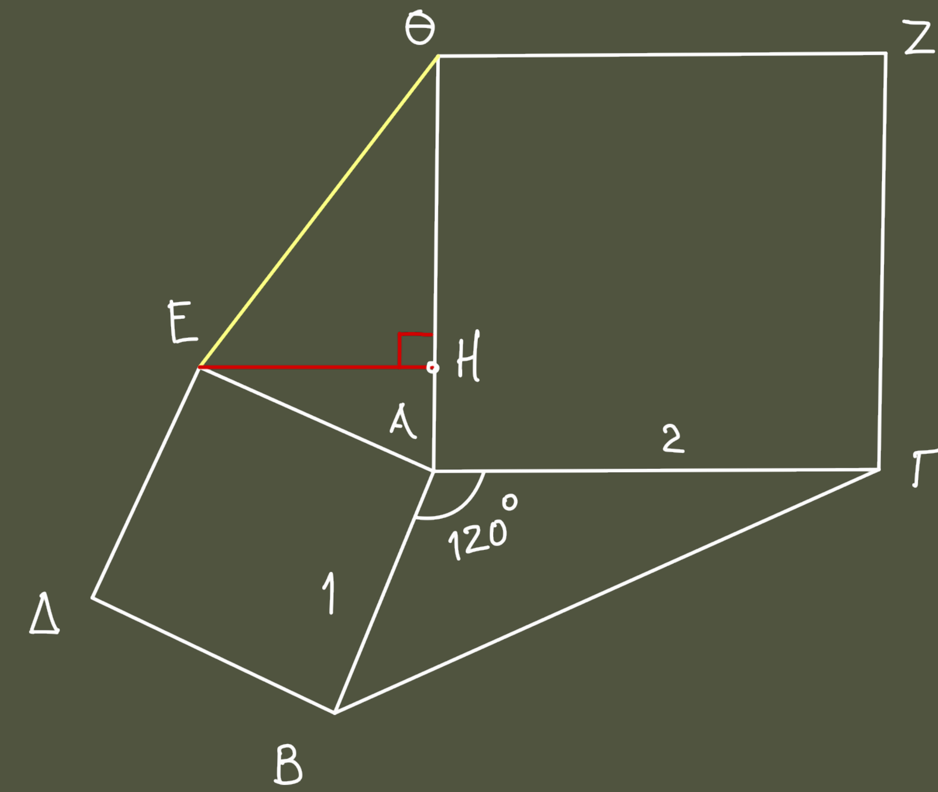
φέρνω ΑΗ, ΒΚ τα ύψη των τριγώνων $\overset{\triangle}{ΣΑΓ}$ και $\overset{\triangle}{ΣΒΔ}$ αντίστοιχα. Ισχύει ότι ΑΗ = ΒΚ άρα

$$(\overset{\triangle}{ΣΑΓ}) + (\overset{\triangle}{ΣΒΔ}) = \frac{1}{2}ΣΓ \cdot υ + \frac{1}{2}ΣΔ \cdot υ = \frac{1}{2}υ\,(ΣΓ + ΣΔ)$$

$$= \frac{1}{2}υ \cdot ΔΓ = \frac{1}{2}υ \cdot ΑΒ = (\overset{\triangle}{ΑΒΓ}).$$

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1, ΑΓ = 2 και $\hat{A} = 120°$. Με πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΘ αντίστοιχα. Τότε:*

- i) *να υπολογίσετε το τμήμα ΕΘ,*
- ii) *να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Θ είναι συνευθειακά και*
- iii) *να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πολυγωνικής επιφάνειας ΒΓΖΘΕΔ είναι $5 + \sqrt{3}$.*



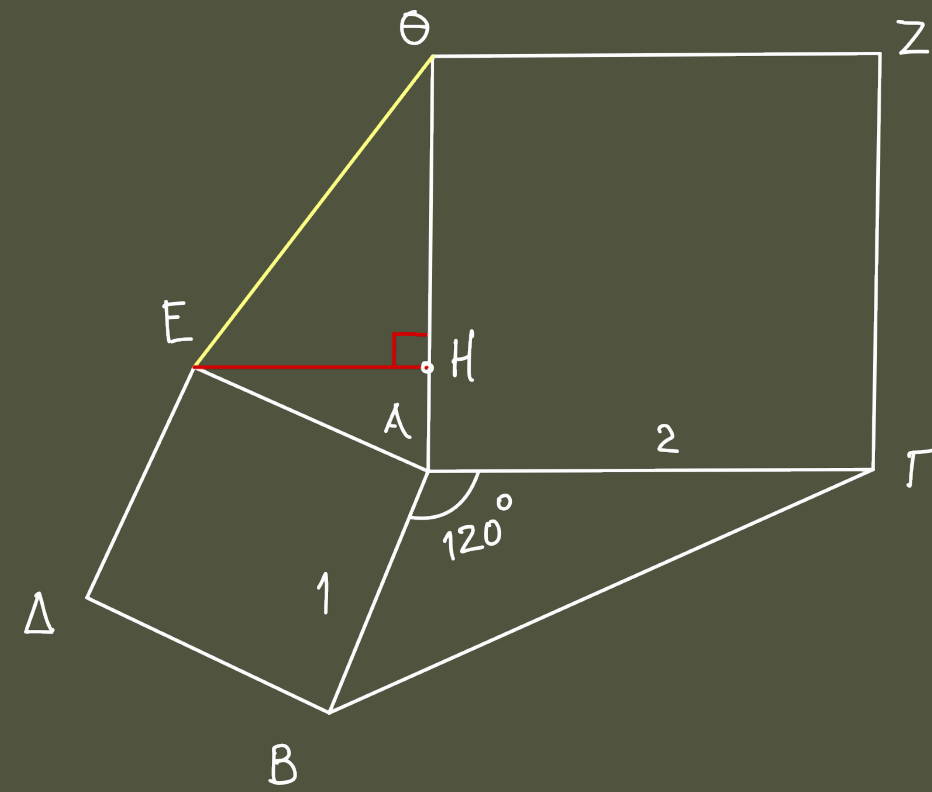
i) Η γωνία $E\hat{A}\Theta$ είναι ίση με 60^0 άρα η γωνία $A\hat{E}H$ είναι 30^0. άρα $HA=\frac{1}{2}$

κάνω γενίκευση του πυθαγορείου στο τρίγωνο $E\overset{\triangle}{A}\Theta$. $E\Theta^2 = EA^2 + A\Theta^2 - 2A\Theta \cdot AH =$

$= 1^2 + 2^2 - 2\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 1+4-2 = 3$ άρα $E\Theta = \sqrt{3}$

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1, ΑΓ = 2 και $\hat{A} = 120°$. Με πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΘ αντίστοιχα. Τότε:*

- *i) να υπολογίσετε το τμήμα ΕΘ,*
- *ii) να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Θ είναι συνευθειακά και*
- *iii) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πολυγωνικής επιφάνειας ΒΓΖΘΕΔ είναι $5 + \sqrt{3}$.*



ii) Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΕΘ}$ ισχύει ότι $ΑΘ^2 = 4 = 3 + 1 = ΕΘ^2 + ΑΕ^2$ άρα ισχύει το πυθαγόρειο οπότε είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $\widehat{ΑΕΘ}$.

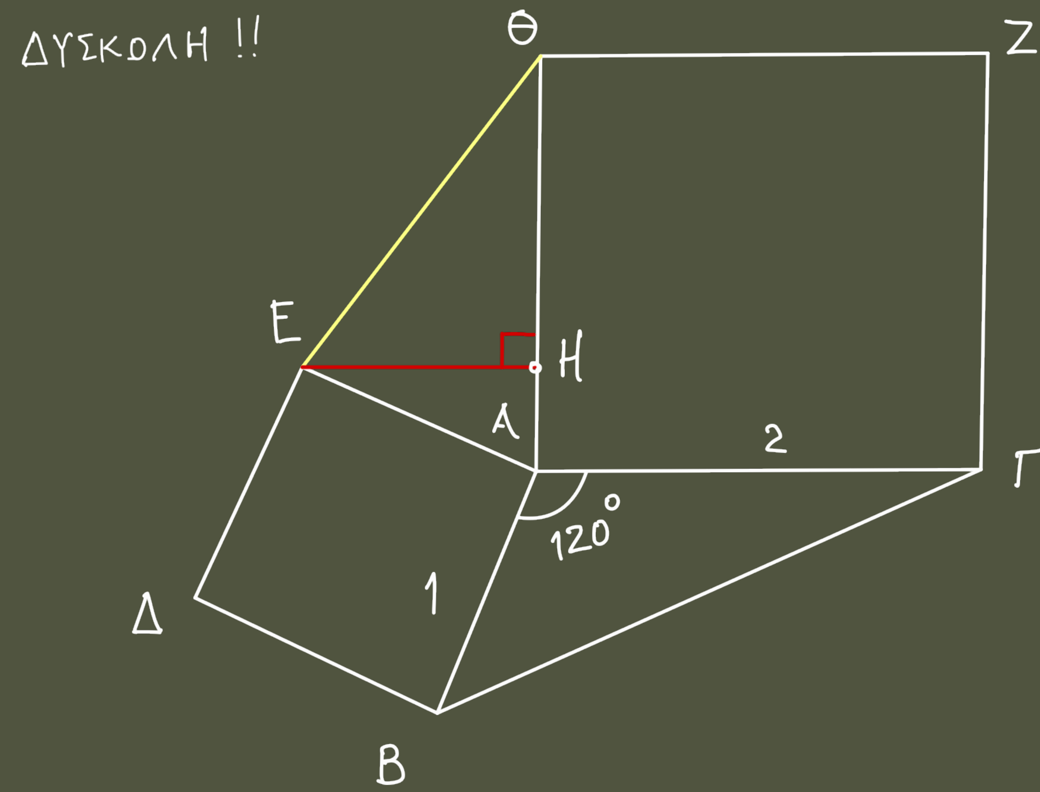
Όμως $\widehat{ΔΕΑ} = 90^\circ$ (γωνία τετραγώνου) οπότε $\widehat{ΔΕΑ} + \widehat{ΑΕΘ} = 180^\circ$ άρα τα σημεία Δ, Ε, Θ συνευθειακά.

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1, ΑΓ = 2 και $\hat{A} = 120°$. Με πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΘ αντίστοιχα. Τότε:*

i) *να υπολογίσετε το τμήμα ΕΘ,*

ii) *να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Θ είναι συνευθειακά και*

iii) *να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πολυγωνικής επιφάνειας ΒΓΖΘΕΔ είναι $5 + \sqrt{3}$.*



Ισεμβαδικά σχήματα και διάμεσοι

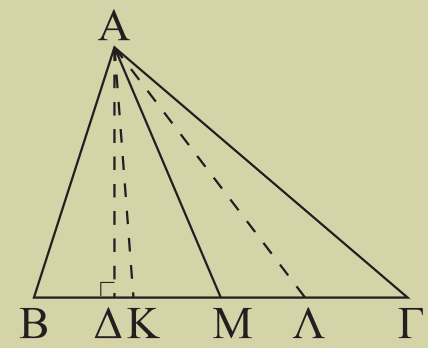
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ.

i) Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου να αποδείξετε ότι

$$(ΑΒΜ) = (ΑΜΓ).$$

ii) Από την κορυφή Α να φέρετε τρεις ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τέσσερα ισοδύναμα τρίγωνα.



Σχήμα 15

Λύση

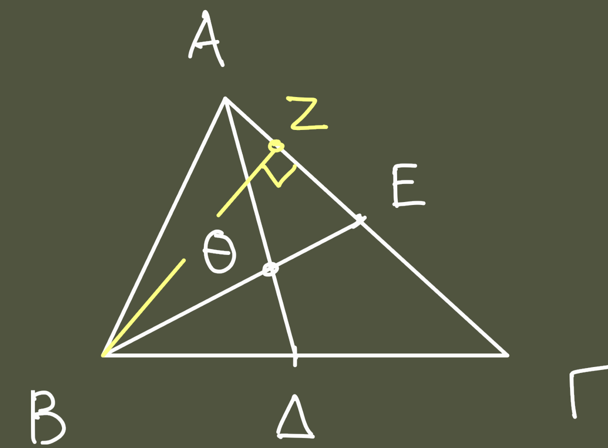
i) Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ (σχ.15). Το ΑΔ είναι και ύψος στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ, οπότε έχουμε

$$(ΑΒΜ) = \frac{1}{2} ΒΜ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} ΜΓ \cdot ΑΔ = (ΑΜΓ)$$

αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι οι ζητούμενες ευθείες είναι οι φορείς των διαμέσων ΑΜ, ΑΚ και ΑΛ των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΜ και ΑΜΓ αντίστοιχα.

2. *Αν οι διάμεσοι ΑΔ και ΒΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Θ να αποδείξετε ότι:*
i) (ΑΒΕ) = (ΒΕΓ), ii) (ΑΘΒ) = (ΔΓΕΘ) και iii) (ΒΘΔ) = (ΑΘΕ).



i) $(\overset{\triangle}{ABE}) = \frac{1}{2} AE \cdot BZ = \frac{1}{2} E\Gamma \cdot BZ = (\overset{\triangle}{BE\Gamma})$

ii) $(\overset{\triangle}{AB\Delta}) = \frac{1}{2} (AB\Gamma) = (\overset{\triangle}{EB\Gamma})$ άρα $(\overset{\triangle}{A\Theta B}) + \cancel{(\overset{\triangle}{B\Theta\Delta})} = \cancel{(\overset{\triangle}{B\Theta\Delta})} + (\Delta\Gamma E\Theta)$ και αποδείχτηκε

iii) $(\overset{\triangle}{B\Theta\Delta}) = (\overset{\triangle}{AB\Delta}) - (\overset{\triangle}{AB\Theta}) = (\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}) - (\Delta\Gamma E\Theta) = (\overset{\triangle}{A\Theta E})$ και αποδείχτηκε

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το βαρύκεντρό του Θ. Από σημείο Σ της διαμέσου ΑΔ φέρουμε τις κάθετες ΣΕ, ΣΖ στις ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*

i) $(ΑΒΣ) = (ΑΓΣ)$,

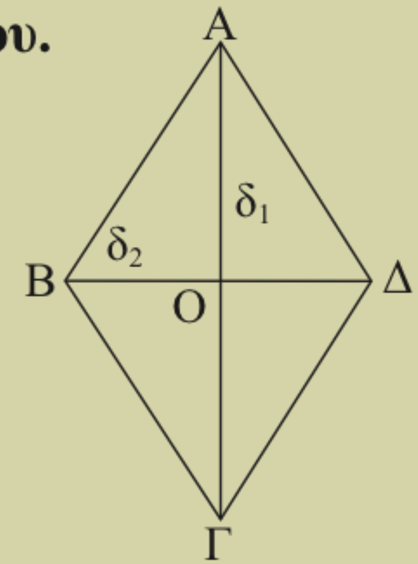
ii) $ΑΒ \cdot ΣΖ = ΑΓ \cdot ΣΕ$ *και*

iii) $(ΑΒΘ) = (ΒΘΓ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ)$.

Εμβαδό τραπεζίου και ρόμβου

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Το εμβαδόν ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.



Σχήμα 12

Απόδειξη

Είναι φανερό (σχ.12) ότι

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΑΒΔ}) + (\text{ΒΓΔ}) \quad (1).$$

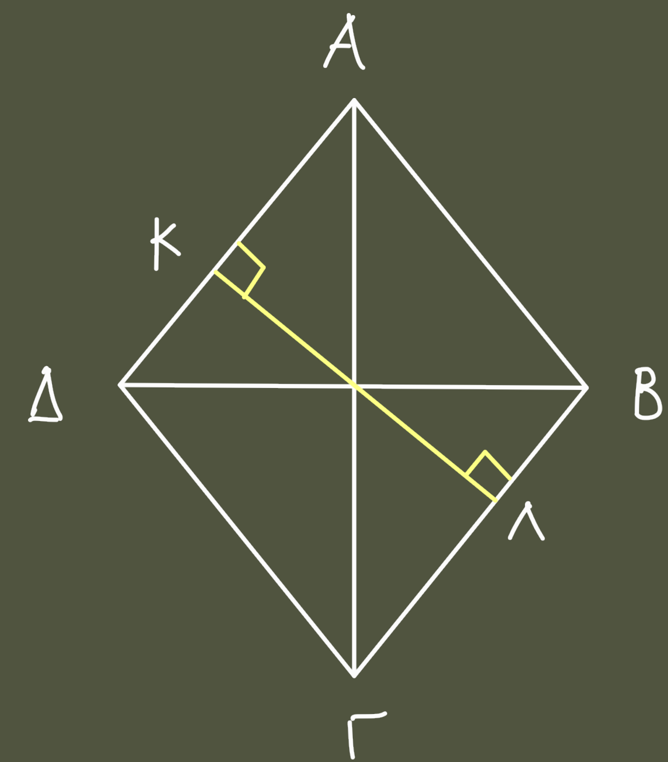
Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες και διχοτομούνται έχουμε:

$$(\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{2}\text{ΒΔ}\cdot\text{ΑΟ} = \frac{1}{2}\delta_2\cdot\frac{\delta_1}{2} = \frac{1}{4}\delta_1\cdot\delta_2 \text{ και } (\text{ΒΓΔ}) = \frac{1}{4}\delta_1\cdot\delta_2 \quad (2).$$

Με αντικατάσταση των (2) στην (1) προκύπτει ότι $\text{Ε} = \dfrac{1}{2}\delta_1\cdot\delta_2 \quad (3).$

Ερωτήσεις Κατανόησης

5. *Αν ένας ρόμβος έχει μήκη διαγωνίων 4 και 5 αντίστοιχα, με τι ισούται το γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος;*



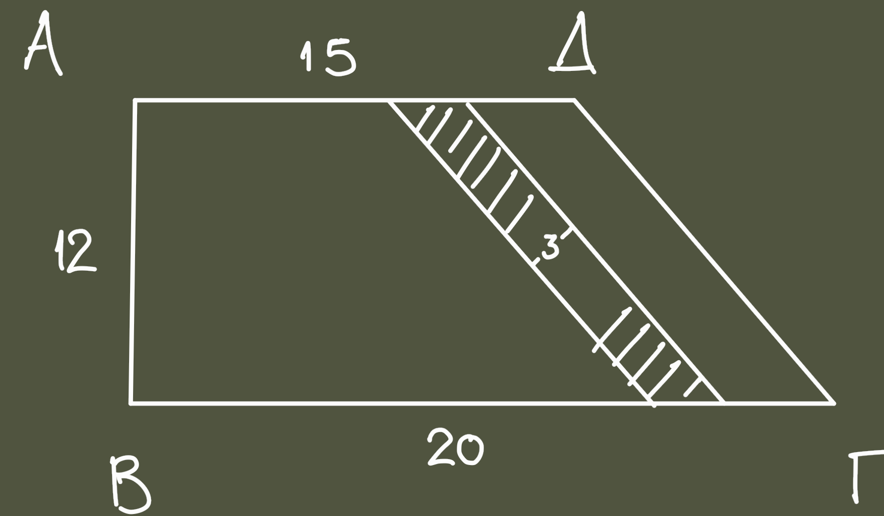
Γνωρίζουμε ότι $ΑΓ = 5$ και $ΔΒ = 4$

Φέρνουμε το ύψος ΚΛ.

Ισχύει ότι $ΑΔ \cdot ΚΛ = E_{ρόμβου} = ΑΓ \cdot ΒΔ = 20$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

6. *Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με $\hat{A} = \hat{B} = 1$∟ , ΑΔ = 15m, ΒΓ = 20m και ΑΒ = 12m. Ένας καινούργιος δρόμος περνάει παράλληλα προς τη ΔΓ και αποκόπτει μια λωρίδα πλάτους 3m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το οικόπεδο που απομένει;*



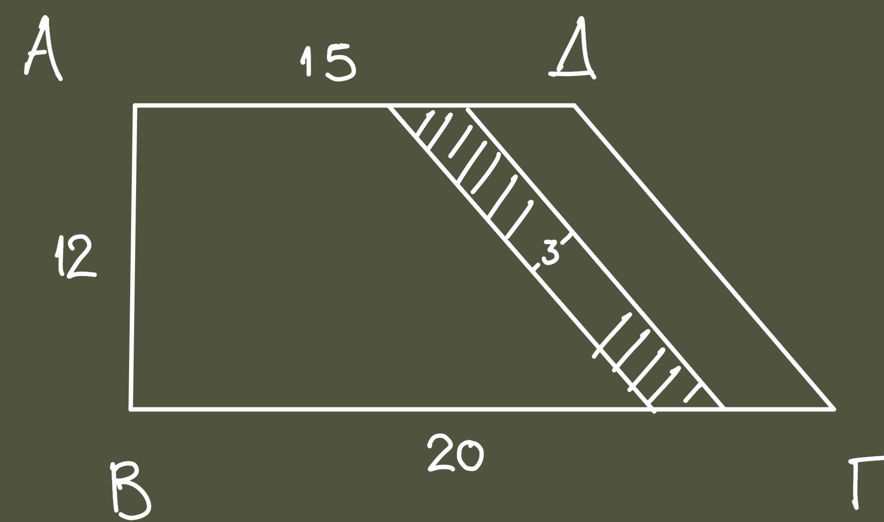
Θα υπολογίσουμε το εμβαδό της λωρίδας. Πρέπει πρώτα να βρούμε το μήκος της πλευράς ΔΓ (βάση της λωρίδας). Έχουμε $ΕΓ = 20 - 15 = 5$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΔΕΓ}$ με πυθαγόρειο παίρνουμε:

$$ΔΓ^2 = ΔΕ^2 + ΕΓ^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

$$\Leftrightarrow \quad ΔΓ = 13.$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

6. *Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με $\hat{A} = \hat{B} = 1\llcorner$, ΑΔ = 15m, ΒΓ = 20m και ΑΒ = 12m. Ένας καινούργιος δρόμος περνάει παράλληλα προς τη ΔΓ και αποκόπτει μια λωρίδα πλάτους 3m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το οικόπεδο που απομένει;*

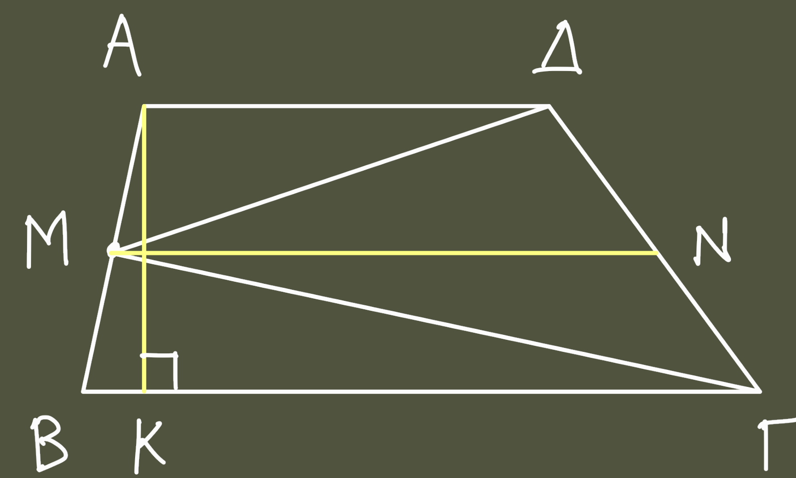


Άρα το εμβαδό της λωρίδας είναι $13 \cdot 3 = 39$. Οπότε το εμβαδό που απομένει είναι:

$$E = \frac{(B+\beta)\upsilon}{2} - 39 = \frac{(20+15)12}{2} - 39 = \frac{35 \cdot 12}{2} - 39 = 210 - 39$$
$$= 171\ m^2$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

4. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ). Αν Μ το μέσο της πλευράς του ΑΒ, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) = 2(ΜΓΔ).*



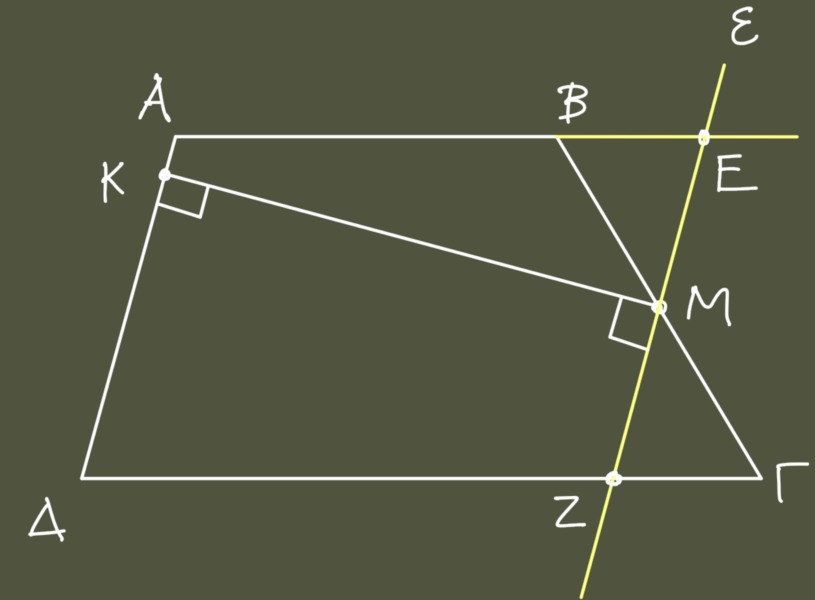
$$(ΑΒΓΔ) = (ΜΔΓ) + (ΑΔΜ) + (ΜΒΓ)$$

$$= (ΜΔΓ) + \frac{ΑΔ \cdot ΑΚ}{4} + \frac{ΒΓ\,ΑΚ}{4} = (ΜΔΓ) + \frac{(ΑΔ + ΒΓ)ΑΚ}{4} =$$

$$= (ΜΔΓ) + \frac{(ΑΒΓΔ)}{2}$$

Άρα $(ΑΒΓΔ) - \frac{(ΑΒΓΔ)}{2} = (ΜΔΓ) \Leftrightarrow \frac{(ΑΒΓΔ)}{2} = (ΜΔΓ) \Leftrightarrow (ΑΒΓΔ) = 2(ΜΔΓ)$

5. *Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο της μίας από τις μη παράλληλες πλευρές του επί την απόσταση του μέσου της άλλης από αυτή.*



Θέλουμε να δείξουμε ότι

$(ΑΒΓΔ) = ΑΔ \cdot ΚΜ$

Φέρνω ευθεία ε κάθετη στην ΚΜ. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΖΜΓ}$ και $\overset{\triangle}{ΒΕΜ}$ είναι ίσα. γιατί: • $ΜΓ = ΜΒ$ (Μ μέσον) • $Ζ\hat{Μ}Γ = Ε\hat{Μ}Β$ (κατά κορυφήν) • $Ζ\hat{Γ}Μ = Μ\hat{Β}Ε$ (εντός εναλλάξ). Άρα $(\overset{\triangle}{ΖΜΓ}) = (\overset{\triangle}{ΒΕΜ})$ οπότε το εμβαδό του τραπεζίου ισούται με το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΕΖΔ. το οποίο είναι: $ΑΔ \cdot ΚΜ$