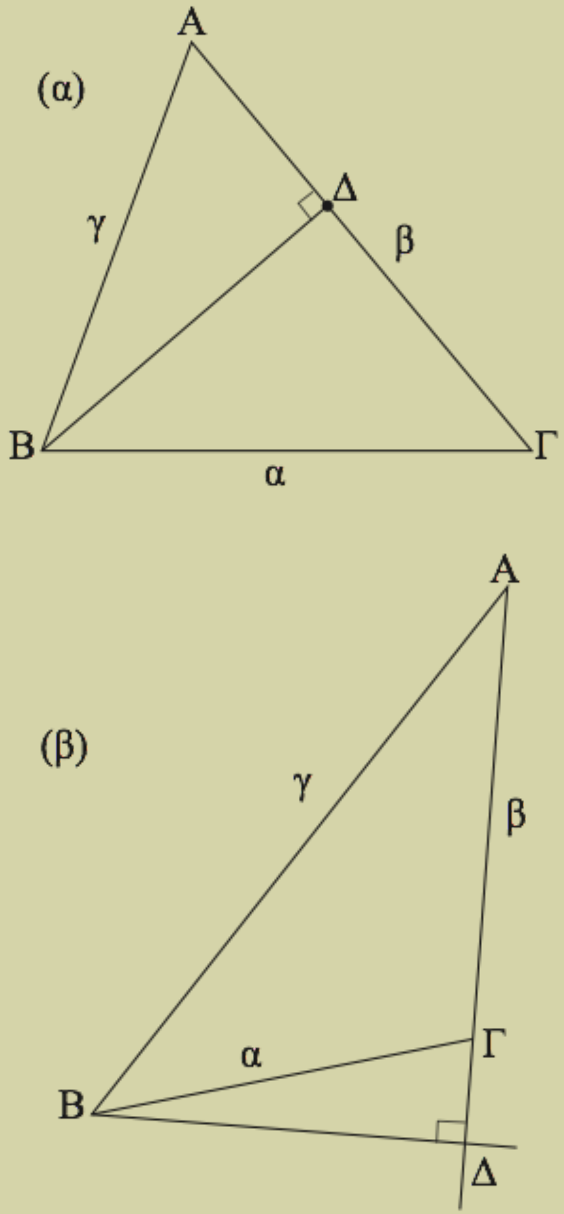
Γεωμετρία Β’ Λυκείου

Γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος Ι

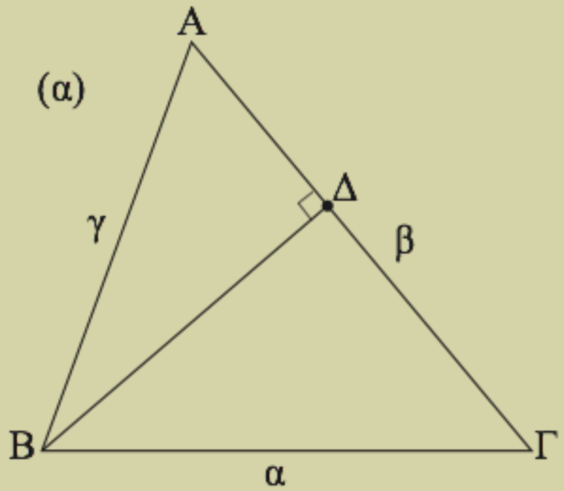


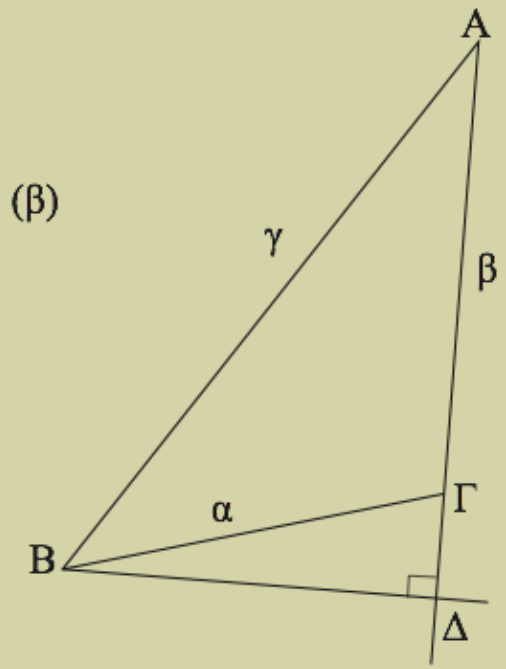
ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.10) είναι π.χ. $\hat{A} < 1∟$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει ότι

$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta}\,.$$





ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ, ΔΒΑ έχουμε, με εφαρμογές του Πυθαγόρειου θεωρήματος αντίστοιχα:

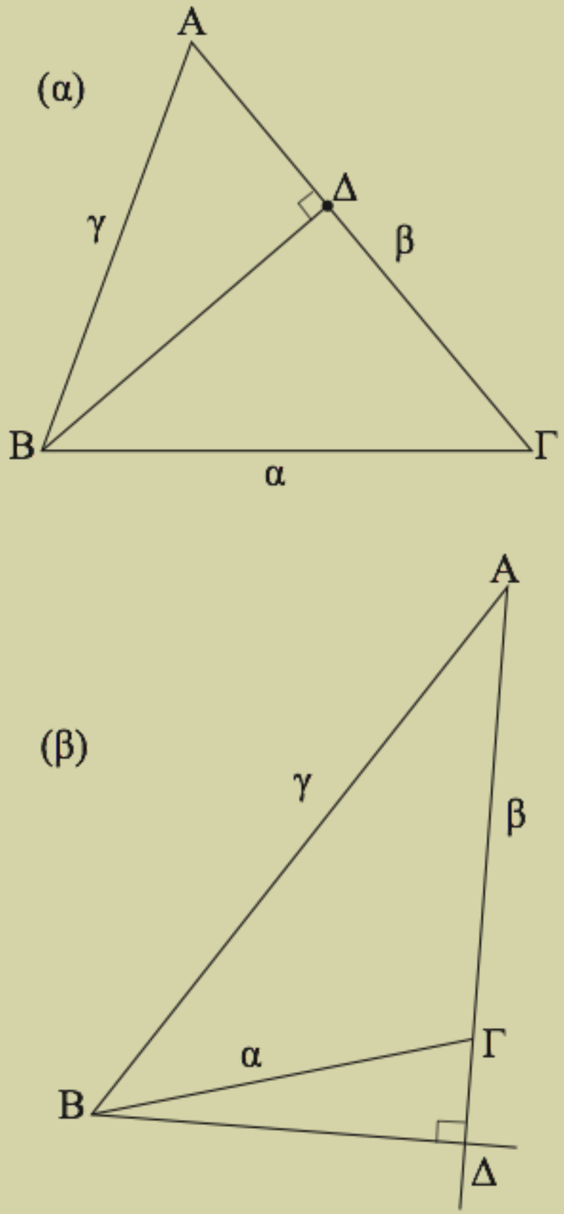
$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 \text{ και } \Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 .$$

Επειδή είναι $\hat{A} < 1\llcorner$ τα Δ, Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Α και ειδικότερα:

- αν $\hat{\Gamma} < 1\llcorner$ το Δ είναι μεταξύ των Α, Γ (σχ.10α), οπότε $\Delta\Gamma = \beta - A\Delta$.
- αν $\hat{\Gamma} > 1\llcorner$ το Γ είναι μεταξύ των Α, Δ (σχ.10β), οπότε $\Delta\Gamma = A\Delta - \beta$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta - A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta .$$



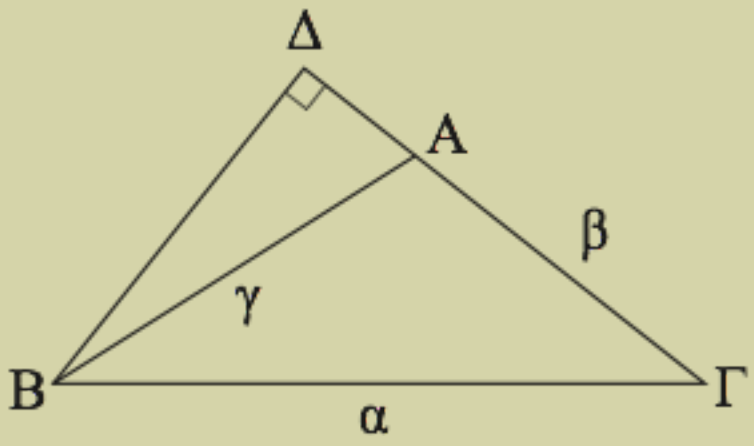
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με αντικατάσταση αυτής της σχέσης και της $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ στην $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$ προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta,}$$

δηλαδή η ζητούμενη ισότητα.

- αν τέλος $\hat{\Gamma} = 1\llcorner$, το Δ συμπίπτει με το Γ και το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ δίνει $\alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2$ που γράφεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$, αφού $A\Delta = \beta$.

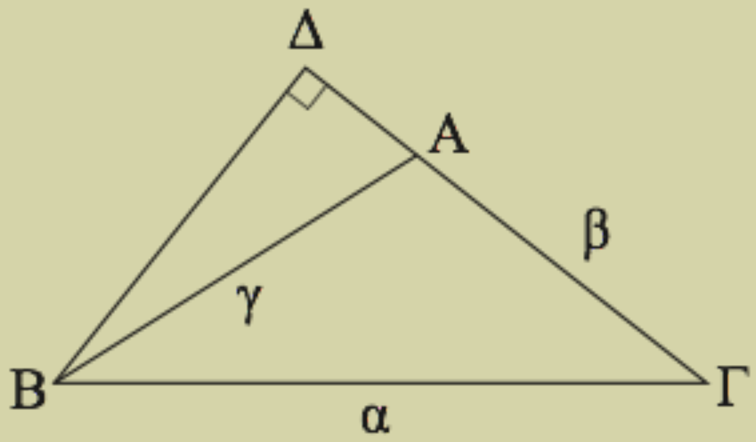


ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.11) είναι π.χ. $\hat{A} > 1\llcorner$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει

$$\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.}$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ και ΔΒΑ, παίρνουμε αντίστοιχα:

$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2 \quad \text{και} \quad \Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2.$$

Επειδή $\hat{A} > 1\llcorner$, το Δ βρίσκεται στην προέκταση της ΓΑ προς το Α και επομένως $\Delta\Gamma = \beta + A\Delta$ οπότε

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta.$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ και

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

στη σχέση $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$, προκύπτει η ζητούμενη ισότητα

$$\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα και τα προηγούμενα θεωρήματα I και II προκύπτει άμεσα ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

i) **Αν $\hat{A} < 1\llcorner$, τότε $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$,** $\left(\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta\right)$

ii) **Αν $\hat{A} = 1\llcorner$, τότε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$,** Πυθαγόρειο Θεώρημα (Το κλασικό...)

iii) **Αν $\hat{A} > 1\llcorner$, τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$.** $\left(\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta.\right)$

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 8$, $\beta = 10$ και $\gamma = 7$, θα έχουμε $\beta^2 = 100$, $\alpha^2 + \gamma^2 = 64 + 49 = 113$ δηλαδή $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$, οπότε $\hat{B} < 1\llcorner$ και επειδή η $\hat{B}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου, το τρίγωνο θα είναι οξυγώνιο.

Τέλος από τα θεωρήματα Ι και ΙΙ εκφράζοντας την προβολή ΑΔ ως προς το συνΑ προκύπτει το επόμενο πόρισμα:

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

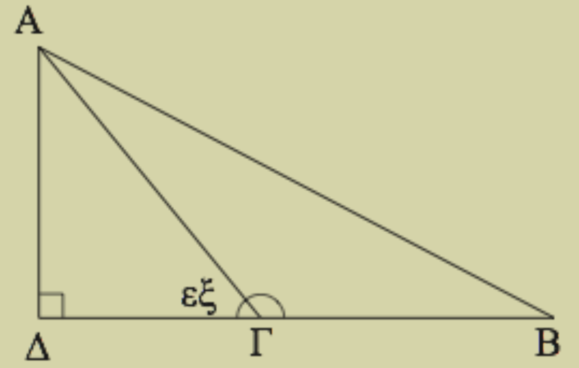
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \text{συν}A.$$

Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο,

ii) να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.



i) Από τη δοσμένη ισότητα προκύπτει ότι η γ είναι η μεγαλύτερη πλευρά και επιπλέον ότι $\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$, οπότε η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία.

ii) Επειδή η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία, σύμφωνα με το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \Gamma\Delta \ (1).$$

Από την υπόθεση όμως έχουμε

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Gamma\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $A\Delta^2 = \beta^2 - \Gamma\Delta^2 = \frac{\beta^2}{4}$, οπότε $A\Delta = \frac{\beta}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ που σημαίνει ότι $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 30°$ και επομένως $\hat{\Gamma} = 150°$.