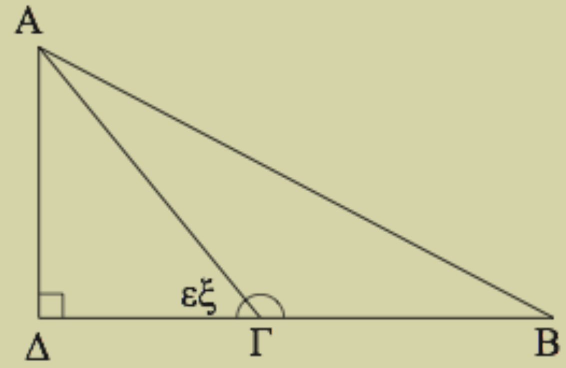
Γεωμετρία Β’ Λυκείου

Γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος ΙΙ

Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\sqrt{3}\alpha\beta}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο,

ii) να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.



i) Από τη δοσμένη ισότητα προκύπτει ότι η γ είναι η μεγαλύτερη πλευρά και επιπλέον ότι $\gamma^2>\alpha^2+\beta^2$, οπότε η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία.

ii) Επειδή η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία, σύμφωνα με το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\cdot\Gamma\Delta \ (1).$$

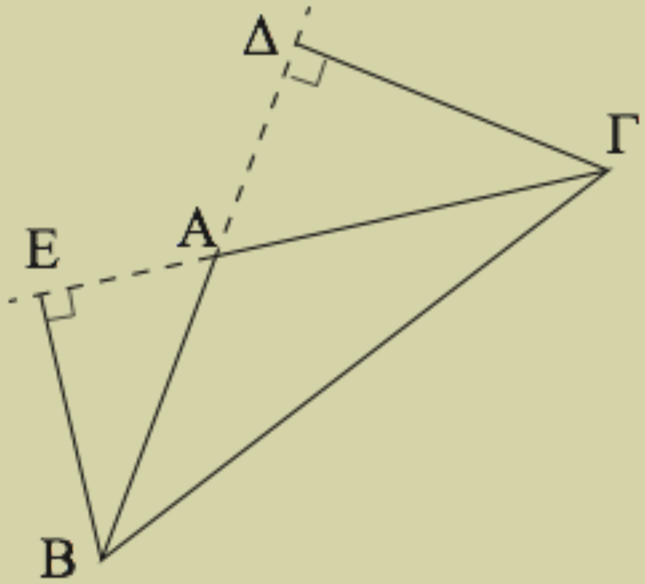
Από την υπόθεση όμως έχουμε

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\sqrt{3}\alpha\beta \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\Gamma\Delta=\frac{\sqrt{3}}{2}\beta$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $A\Delta^2=\beta^2-\Gamma\Delta^2=\frac{\beta^2}{4}$, οπότε $A\Delta=\frac{\beta}{2}=\frac{A\Gamma}{2}$ που σημαίνει ότι $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}=30°$ και επομένως $\hat{\Gamma}=150°$.

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώστε τα κενά:*



i) $B\Gamma^2 = \ldots + \ldots + 2AB \ldots$

ii) $B\Gamma^2 = \ldots + \ldots + 2A\Gamma \ldots$

i) $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2AB \cdot A\Delta$

ii) $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot EA$

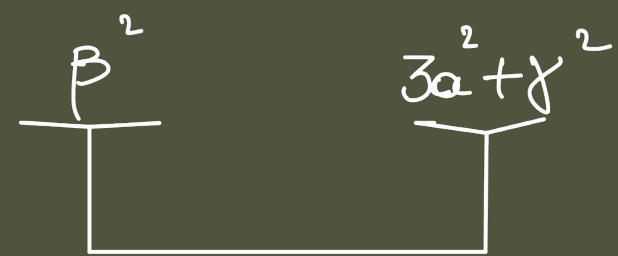
2. *Να βρεθεί το είδος των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ όταν:*

i) $\beta^2 = 3\alpha^2 + \gamma^2$,

ii) $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$,

iii) $\alpha^2 - \beta^2 = 2\gamma^2$.

$-2\alpha^2$ (θα ελαφρύνει)



i) $\beta^2 = 3\alpha^2+\gamma^2$ $\qquad \beta^2 > \alpha^2+\gamma^2$

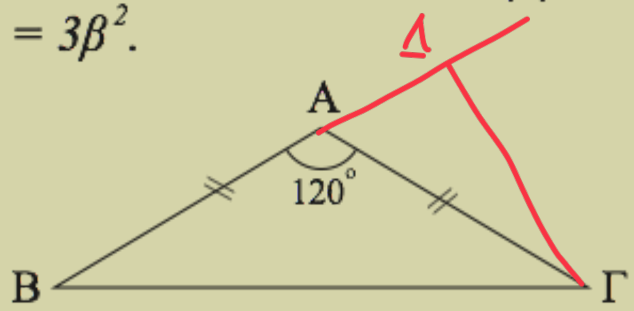
άρα το ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

ii) $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow$ το ΑΒΓ ορθογώνιο.

iii) $\alpha^2-\beta^2 = 2\gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2+2\gamma^2 > \beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow$ ΑΒΓ αμβλυγώνιο.

3. *Αν β η* μεγαλύτερη *πλευρά αμβλυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ τότε* $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$ *(Να συμπληρώσετε τα κενά).*

4. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 120°$, να δικαιολογήσετε γιατί $\alpha^2 = 3\beta^2$.*



Εφόσον $\hat{A}$ αμβλεία γωνία θα ισχύει

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2AB \cdot A\Delta.$$

$$= \beta^2 + \beta^2 + \cancel{2}\beta \cdot \frac{\beta}{\cancel{2}}$$

$$= 3\beta^2$$

$\widehat{\Gamma A \Delta} = 60° \Leftrightarrow \widehat{\Delta \Gamma A} = 30°$

άρα $A\Delta = \beta/2$