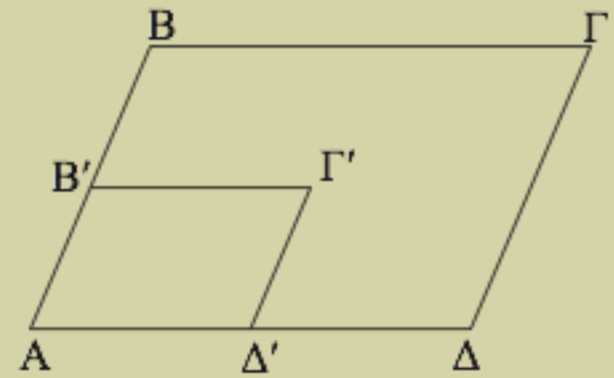
Γεωμετρία Β' Λυκείου

Μάθημα 4 - Ομοιότητα

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από τα μέσα Β′ και Δ′ των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα, ας φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΔ και ΑΒ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ′. Τότε το παραλληλόγραμμο ΑΒ′Γ′Δ′ έχει τις γωνίες του ίσες με τις αντίστοιχες γωνίες του ΑΒΓΔ, ενώ ισχύει ότι



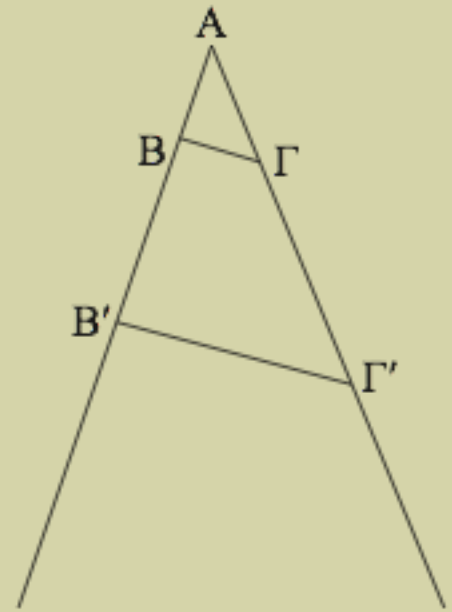
Σχήμα 1

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Delta'}{A\Delta} = \frac{1}{2}$$

Ας θεωρήσουμε κατόπιν ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ας προεκτείνουμε τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ προς τα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Θεωρούμε σημείο Β′ στην προέκταση της ΑΒ, έτσι ώστε ΑΒ′ = 3ΑΒ. Από το Β′ φέρουμε παράλληλη προς την τρίτη πλευρά ΒΓ, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Γ′.

Τότε παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒ′Γ′ έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, ενώ επιπλέον ισχύει ότι

$$\frac{\mathrm{A}\mathrm{B}'}{\mathrm{A}\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{A}\Gamma'}{\mathrm{A}\Gamma} = \frac{\mathrm{B}'\Gamma'}{\mathrm{B}\Gamma} = 3.$$



Σχήμα 2

Ορισμός

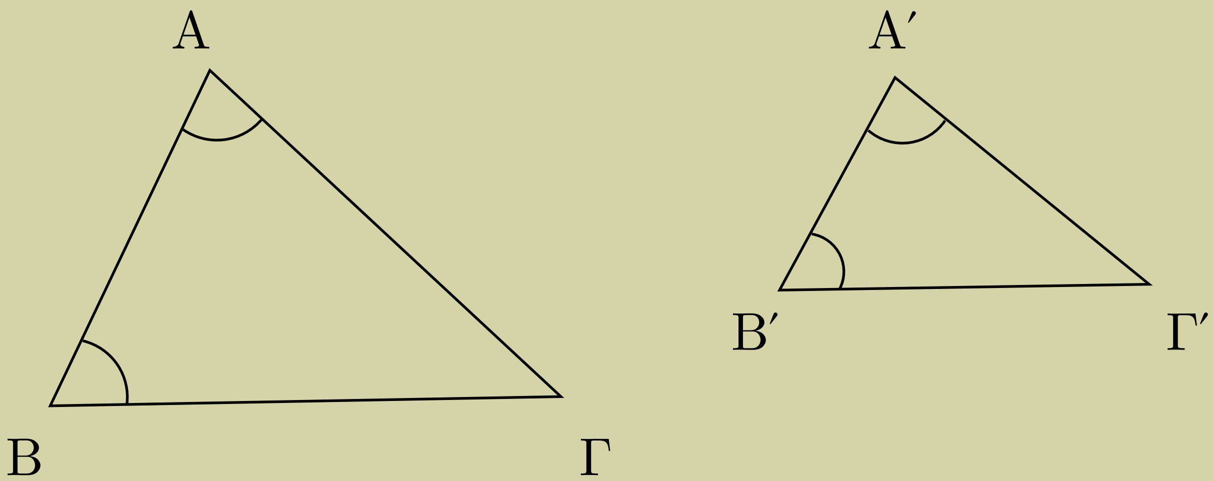
Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Ο λόγος των ομόλογων πλευρών δύο ευθύγραμμων σχημάτων λέγεται λόγος ομοιότητας αυτών και συμβολίζεται με λ. Η ομοιότητα μεταξύ δύο ευθύγραμμων σχημάτων συμβολίζεται με $\approx$.

Κριτήρια Ομοιότητας

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (1ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.



$\hat{A} = \hat{A}'$

$\hat{B} = \hat{B}'$

Άρα είναι όμοια, δηλαδή

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \lambda$$

έχουν πλευρές ανάλογες

Κριτήρια Ομοιότητας

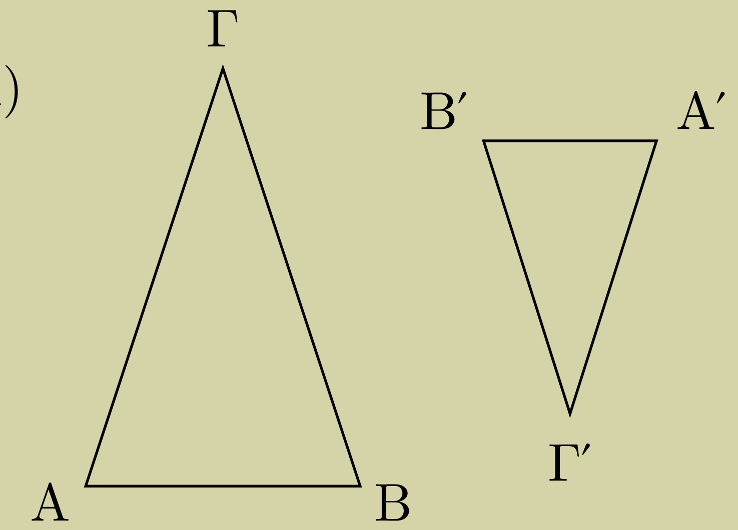
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μία οξεία γωνία τους ίση.

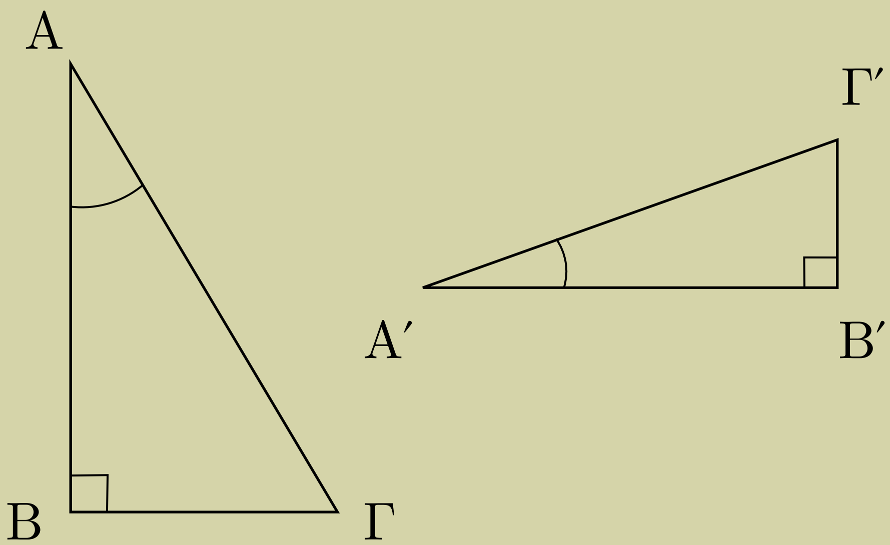
ii) Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.

iii) Δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.

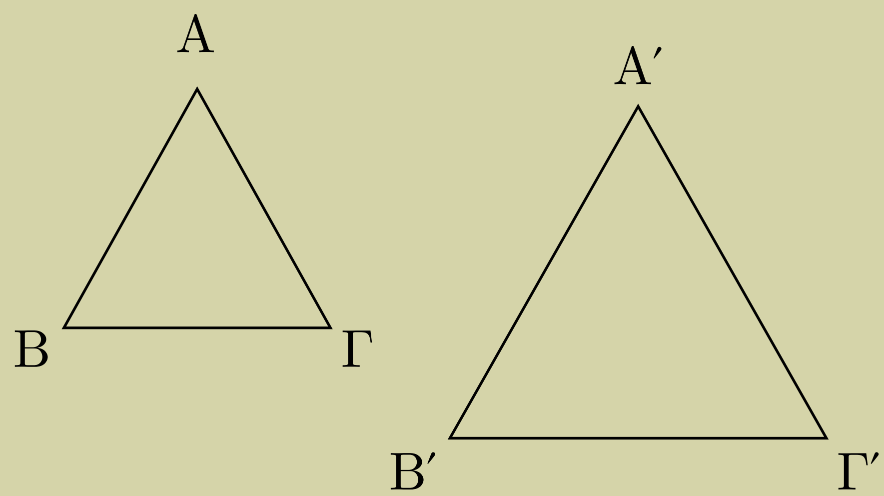
iii)



i)



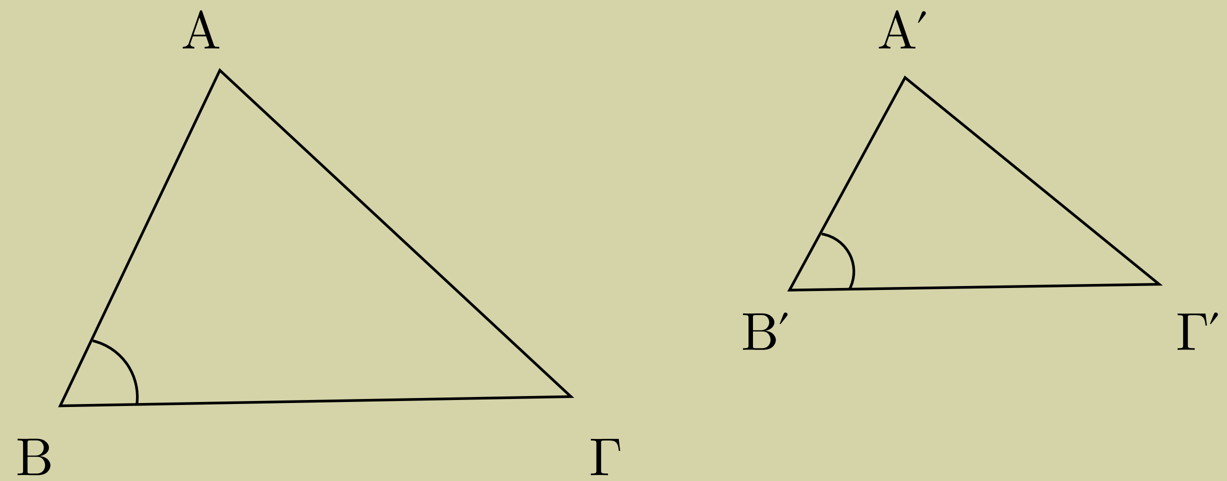
ii)



Κριτήρια Ομοιότητας

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ (2ο Κριτήριο Ομοιότητας)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \lambda$$

$$\hat{B} = \hat{B}'$$

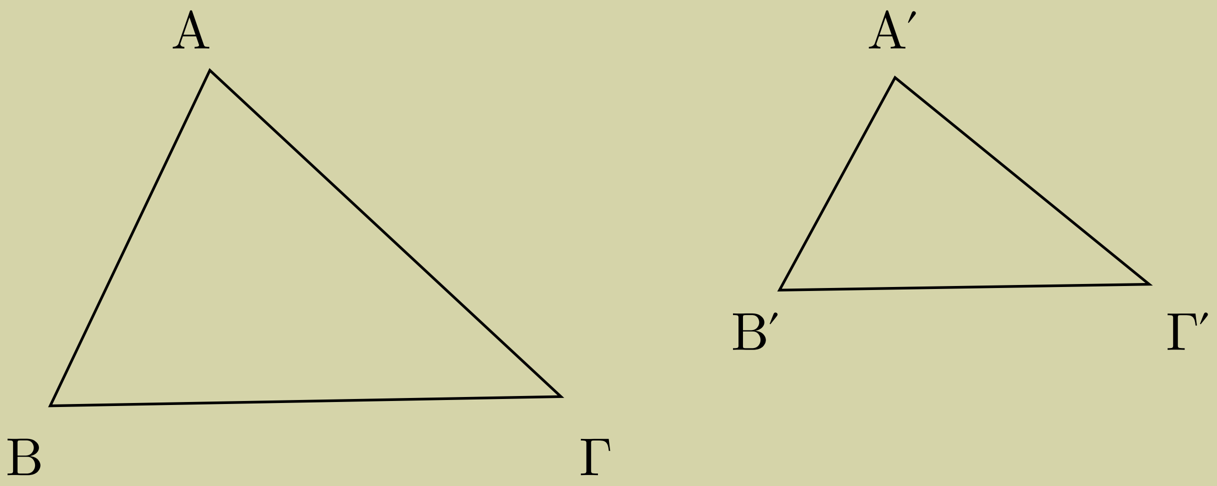
Άρα είναι όμοια, δηλαδή

έχουν πλευρές ανάλογες

Κριτήρια Ομοιότητας

ΘΕΩΡΗΜΑ III (3ο Κριτήριο Ομοιότητας)

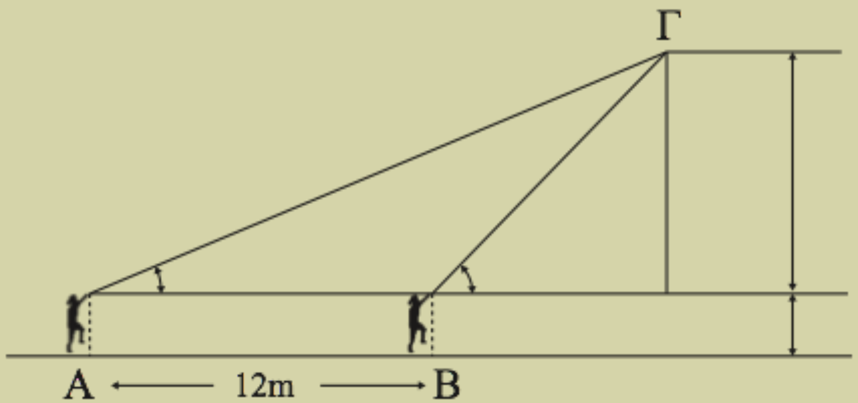
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

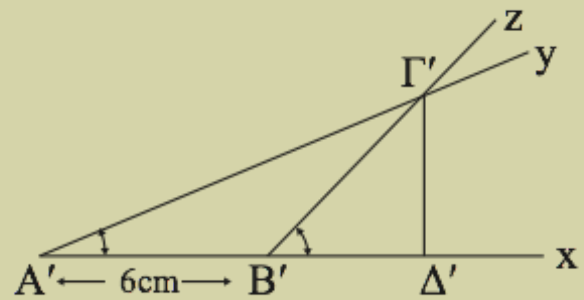


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \lambda$$

Πόσο ύψος έχει το σχολείο σας;

Λύση



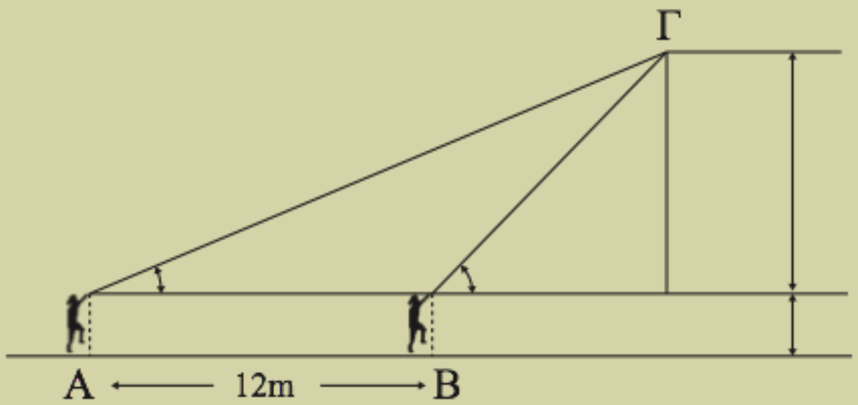


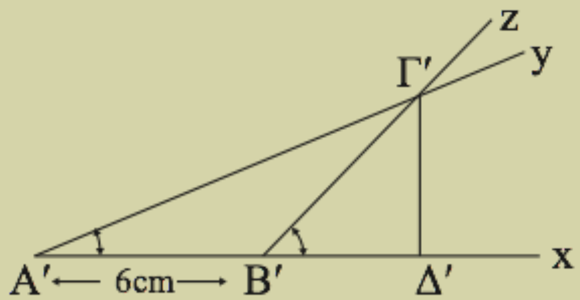
Ένας μαθητής βλέπει την κορυφή Γ του σχολείου από δύο σημεία Α και Β στο έδαφος (σχ.6). Χρησιμοποιώντας έναν εξάντα (βλ. επόμενη παράγραφο) μετράει τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ με τις οποίες φαίνεται το σχολείο, π.χ. $\hat{A} = 19°$ και $\hat{B} = 43°$.

Κατόπιν μετράει την απόσταση από το σημείο Α ως το Β, π.χ. ΑΒ = 12 μέτρα. Η μέτρηση των γωνιών έγινε από κάποια απόσταση από το έδαφος ίση με το ύψος του μαθητή, ας υποθέσουμε ότι έχει ύψος 1,8 μέτρα. Για να υπολογίσουμε το ύψος του σχολείου κατασκευάζουμε σε μία κόλλα χαρτί το αντίστοιχο μοντέλο. Θεωρούμε

Πόσο ύψος έχει το σχολείο σας;

Λύση





ένα ευθύγραμμο τμήμα $A'B' = 6$ cm. Προεκτείνουμε την $A'B'$ προς το μέρος του B' και σχηματίζουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο δύο γωνίες $x\hat{A}'y = 19°$ και $x\hat{B}'z = 43°$. Οι ημιευθείες $A'y$ και $B'z$ τέμνονται στο σημείο Γ'. Από το σημείο Γ' φέρουμε την κάθετη $\Gamma'\Delta'$ στην $A'B'$ και έχουμε κατασκευάσει το μοντέλο μας. Μετράμε ότι το $\Gamma'\Delta'$ ισούται με 3,3 cm.

Ο λόγος ομοιότητας είναι $\lambda = \dfrac{AB}{A'B'} = 200$.

Επομένως το πραγματικό μήκος του ΓΔ είναι $\Gamma\Delta = \lambda\Gamma'\Delta' = 6{,}6$ μέτρα. Προσθέτοντας και το ύψος του μαθητή, έχουμε ότι το πραγματικό ύψος του σχολείου είναι 8,4 μέτρα.